

氏名	NERTILA GJINI
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	第3544号
学位授与年月日	平成11年3月24日
学位授与の要件	学位規則第4条第1項該当者
学位論文名	A self-similar tiling generated by the Pisot number which is the root of the equation $x^3-x^2-1=0$ (方程式 $x^3-x^2-1=0$ の正根であるピソ数から生成される自己相似タiling)
論文審査委員	主査教授 釜江 哲朗 副主査教授 小松 孝 副主査講師 伊達山正人

論文内容の要旨

方程式 $x^3-x^2-1=0$ の正根 β は、代数的整数でその代数的共役は、絶対値が1より小さい、すなわち、Pisot 数と呼ばれるものである。さらに、 β は単数でもある。非負実数 x の β -展開 $x=a_N \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$ とは、各 a_i が β 以下の非負整数であって、

$$x = \sum_{-\infty < i \leq N} a_i \beta^i \text{ かつ } |x - \sum_{N \leq i \leq N} a_i \beta^i| < \beta^N$$

がすべての $M=N, N-1, \dots$ に対して成立することをいう。このような、 β -展開においてあるところから右の a_i がすべて0になるとき、 x は有限 β -展開をもつといい、右に続く0は省略する。 β の代数的共役の一つを β' (複素数) とおき、この対応がもたらす $Z[\beta]$ から $Z[\beta']$ への同型対応を $x \mapsto x'$ で現す。右端が $a_L a_{L-1} \cdots a_M$ となる有限 β -展開をもつ x のこの対応による像全体の閉包を $K_{a_L a_{L-1} \cdots a_M}$ と記す。ここで、 $L < 0$ のとき、 $K_{a_L a_{L-1} \cdots a_M}$ を tile と呼び、それ以外るとき、subtile と呼ぶ。とくに、 K_0 を central tile と呼ぶ。このような tile の全体が、複素平面を被い、異なる tile は内部で交わらないこと等が知られている。また、central tile は、Tridragon と呼ばれる有名なフラクタル図形で、多くの研究がある。

本論文では、

1. 正のすべての $Z[\beta]$ の元が有限 β -展開をもつことを示した。
2. 複素平面上での tile の配置、境界の Hausdorff 次元、3 つ以上の異なる tile の交わり、すなわち、頂点の決定を行った。

論文審査の結果の要旨

方程式 $x^3-x^2-1=0$ の正根 β は、1より大きい代数的整数でその代数的共役は、絶対値が1より小さい、すなわち、Pisot 数と呼ばれるものである。さらに、 β は単数でもある。非負実数 x の β -展開 $x=a_N \cdots a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots$ とは、各 a_i が β 以下の非負整数であって、

$$x = \sum_{-\infty < i \leq N} \alpha_i \beta^i \text{ かつ } |x - \sum_{N \leq i \leq N} \alpha_i \beta^i| < \beta^N$$

がすべての $N = N, N-1, \dots$ に対して成立することをいう。このような、 β -展開においてあるところから右の α_i がすべて 0 になるとき、 x は有限 β -展開をもつといい、右に続く 0 は省略する。 β の代数的共役の一つを β' (複素数) とおき、この対応がもたらす $\mathbb{Z}[\beta]$ から $\mathbb{Z}[\beta']$ への同型対応を $x \mapsto x'$ で表す。右端が $a_{l-1}a_{l-2}\dots a_N$ となる有限 β -展開をもつ x のこの対応による像全体の閉包を $K_{a_{l-1}a_{l-2}\dots a_N}$ と記す。ここで、 $l = -1$ のとき、 K_\emptyset を tile と呼び、とくに、 K_\emptyset (すなわち、 $l = -1$ かつ $a_{l-1}a_{l-2}\dots a_N = \emptyset$) を central tile と呼ぶ。一般のピソ数に対する tiling の研究は、新潟大学の秋山茂樹氏によって行なわれ、その一般論から、このような tile の全体が、複素平面を被い、異なる tile の交わりがルベーク測度 0 をもつこと等がわかる。とくに、この β に対する central tile は、Tridragon と呼ばれる有名なフラクタル図形で、多くの研究がある。

本論文では、

1. 正のすべての $\mathbb{Z}[\beta]$ の元が有限 β -展開をもつことを示した。
2. 複素平面上での tile の配置、境界の Hausdorff 次元、3 つ以上の異なる tile の交わり (頂点) 等を決定した。

以上の結果は興味深いもので、フラクタル図形についての新しい知見をもたらすものである。よって、博士 (理学) の学位授与に値するものと審査した。